Φsimatenten phür φ- phreaks (oder: proporzione divina),

wobei es um die Zahl mit der Eigenschaft $1 : \varphi = \varphi - 1$ geht.
Ja, gibt´s denn so was? Da hilft ein bisschen Mathe – eine Gleichung:

$$1/x = x - 1$$

Multiplikation mit φ auf beiden Seiten ergibt: $1 = x^2 - x$
Auf beiden Seiten 1 subtrahiert : $0 = x^2 - x - 1$
Diese quadratische Gleichung mit der p-q-Formel gelöst: $x_1 = ½ + \sqrt{¼ + 1} = ½ + ½\sqrt{5}$
oder $x_2 = ½ - ½\sqrt{5}$.

Die zweite Lösung ist negativ, wir bezeichnen als φ (phi) nur die positive.

Also: $\boldsymbol{\varphi = ½ + ½\sqrt{5}} \approx 1{,}618033988$.............

Der **Goldene Schnitt** heißt erst seit dem 19. Jahrhundert so, andere Namen sind „stetige Teilung" und „göttliche Teilung" nach Luca Paciolo (1445 bis 1514), Mathematiker an der Universität Perugia, der bei der Beschäftigung mit Euklid auf dieses Teilungsverhältnis aufmerksam wurde. Von Euklid ist die erste genaue Beschreibung überliefert. Zur Sache:

Eine Strecke wird so geteilt, dass die ganze Strecke zum größeren Teil sich so verhält wie der größere zum kleineren.

oder:

was zu der Gleichung führt:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \qquad \text{oder:} \qquad \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

beidseitig mit den Nennern multipliziert:

$$\begin{aligned} 1\cdot(1-x) &= x\cdot x \\ 1-x &= x^2 \\ 0 &= x^2+x-1 \\ x_1 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \quad > 0 \\ x_2 &= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \quad < 0 \\ & \qquad (\text{entfällt}) \end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert die Lösung für x, also die größere Teilstrecke. Also ist 1/x das Teilungsverhältnis des goldenen Schnitts. Das haben wir oben schon mal gesehen.

$$\frac{1}{x} = \underbrace{\frac{1 \cdot(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5})}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5})}}_{(\text{erweitern})} = \underbrace{\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot 5}}_{(3.\text{bin. Formel})} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} = \varphi$$

Von Leonardo da Pisa (nein, nicht da Vinci, der kommt später) aus dem 13. Jahrhundert, genannt **Fibonacci**, stammt die Zahlenfolge, die hier gerade den Rahmen zu sprengen droht: jede Zahl ist die Summe ihrer beiden Vorgänger. Bildet man die Quotienten f(n+1):f(n), also 1:1; 2:1; 3:2; 5:3; 8:5; 13:8; 21:13; 34:21;....,

1
1
2
3
5
8
13
21
34
55
89
144
233
377
610
987
1597
2584
4181
6765
10946
17711
28657
46368
75025
121393
196418
317811
514229
832040
1346269
2178309
3524578
5702887
9227465

stellt man fest, dass man sich immer mehr dem Wert von φ nähert; φ ist der Grenzwert der Quotientenfolge der Fibonaccifolge.

Schön ist auch dieser unendliche Kettenbruch: $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}}}}} = \varphi$

oder dieser unendliche Wurzelterm:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}}}}}}}} = \varphi$$

Setzt man den Kettenbruch gleich x, bekommt man diese Gleichung:

$x = \frac{1}{1+x}$

Ein bisschen aufgeräumt:

$x\cdot(1+x) = 1$

$x + x^2 = 1$

$x^2 + x - 1 = 0 \rightsquigarrow x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \Rightarrow 1 + x = \varphi$

Haben wir das philleicht schon mal gesehen?

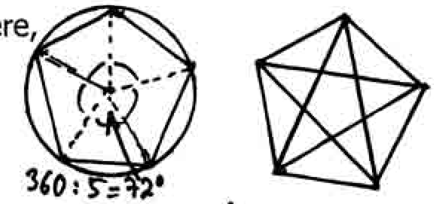
Bei der Wurzel sähe das so aus:

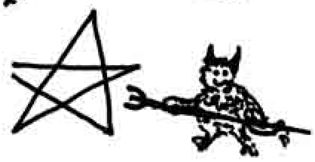
$x = \sqrt{1+x} \quad |\uparrow 2$

$x^2 = 1 + x$

$x^2 - x - 1 = 0 \rightsquigarrow x = \varphi \text{ (s.o.)}$

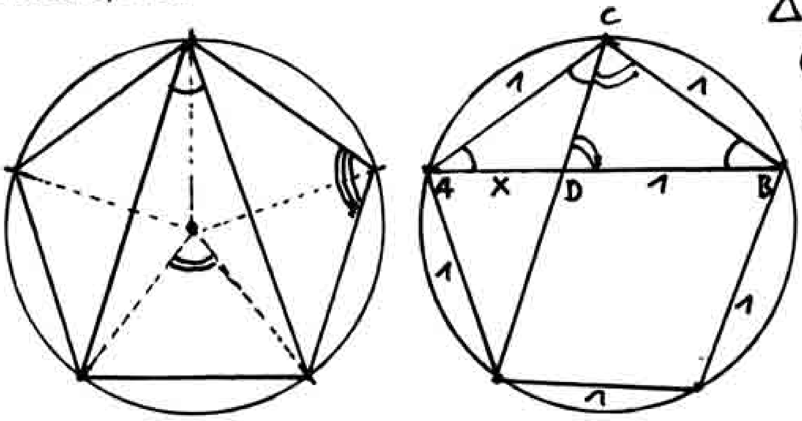
Mephistopheles: Gesteh ich's nur! Dass ich hinausspaziere,
Verbietet mir ein kleines Hindernis:
Der Drudenfuß auf eurer Schwelle –
Faust: Das Pentagramma macht dir Pein?
Ei sage mir, du Sohn der Hölle:
Wenn dich das bannt, wie kamst du dann herein?
Mephistopheles: Beschaut es recht! Es ist nicht gut gezogen:
Der eine Winkel, der nach außen zu,
Ist, wie du siehst, ein wenig offen.





Ob, wie Herr Goethe hier erzählt, die Diagonalen des Fünfecks gegen böse Geister helfen, muss füglich bezweifelt werden. Feldversuche mit Politessen und Finanzamt führten bisher nicht zu befriedigenden Ergebnissen. Hat´s schon mal jemand mit Mathelehrern ausprobiert?
Wenn schon nicht magisch, dann aber umso mehr mathematisch ist das regelmäßige Fünfeck mit seinen Diagonalen interessant.
Man zeichnet vom Mittelpunkt eines Kreises fünfmal den Winkel 360 : 5 = 72° und verbindet die Schnittpunkte mit dem Kreis – ein perfektes Fünfeck.

Zwei Diagonalen bilden mit einer Seite ein gleichschenkliges Dreieck, der Winkel an der Spitze ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel. Daraus ergeben sich alle übrigen Winkel, $\measuredangle$ = 36°; $\measuredangle$ = 72°; $\measuredangle$ = 108°. Und daher ähnliche Dreiecke, z.B.:



$\triangle ABC$ und $\triangle ADC$

$(\overline{AD} = \overline{DC};\ \overline{BD} = \overline{BC})$

also: $\frac{x+1}{1} = \frac{1}{x}$

$(x+1)\cdot x = 1$

$x^2 + x - 1 = 0$

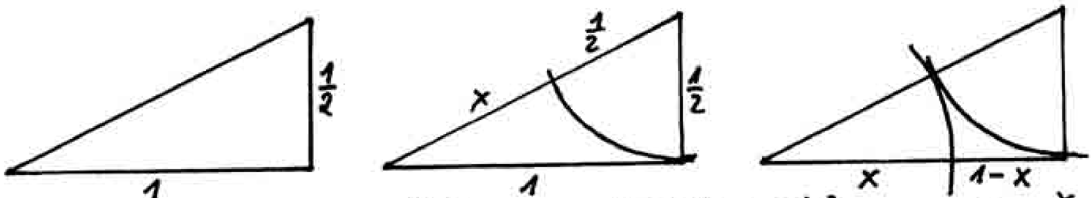
o.k.

außerdem: $\overline{AB} = \varphi$

Es ergibt sich also, dass φ auch das Teilungsverhältnis der Fünfecksdiagonalen ist, diese schneiden sich im goldenen Schnitt.

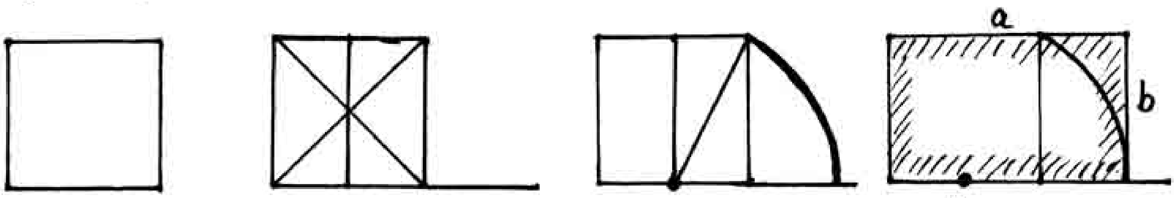
Ein bisschen mehr mit Geodreieck und Zirkel:

1) einfache Konstruktion des goldenen Schnitts:



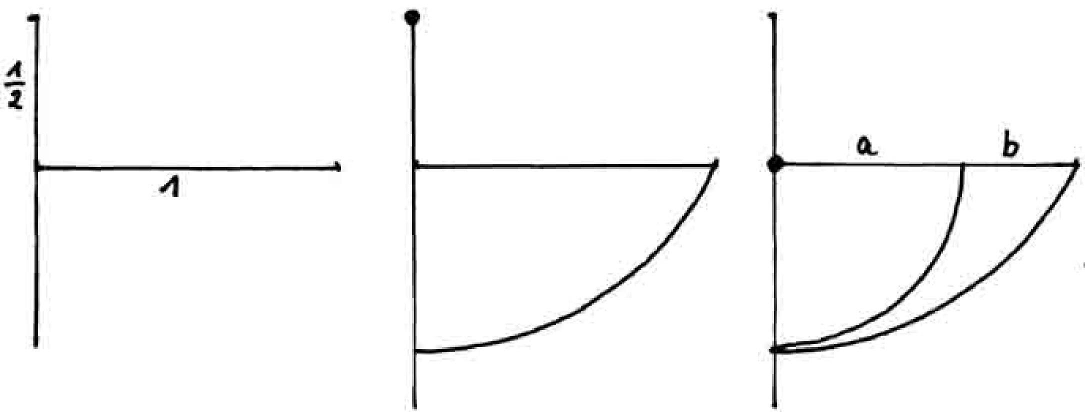
Pythagoras: $1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \longrightarrow \frac{x}{1-x} = \varphi$

2) das „goldene Rechteck":



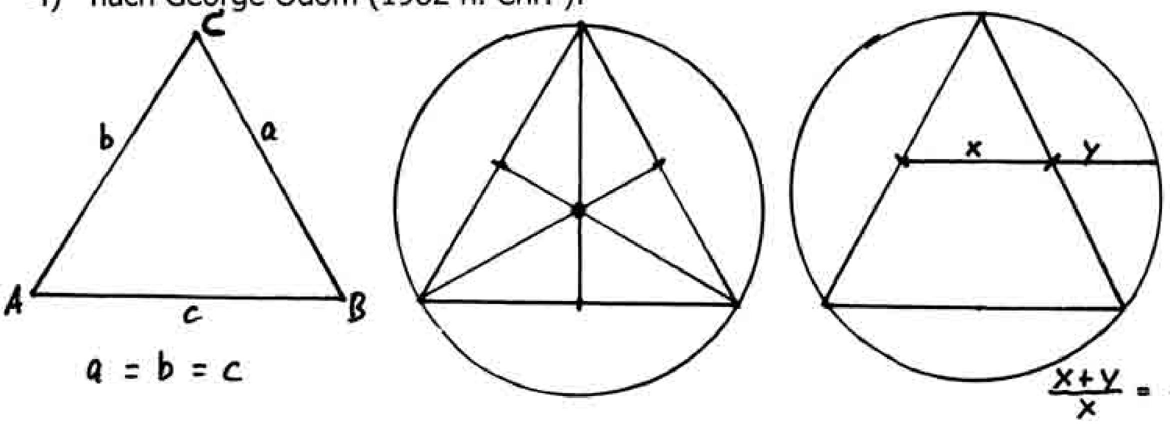
$\frac{a}{b} = \varphi$

3) nach Euklid (ca. 300 v. Chr.):



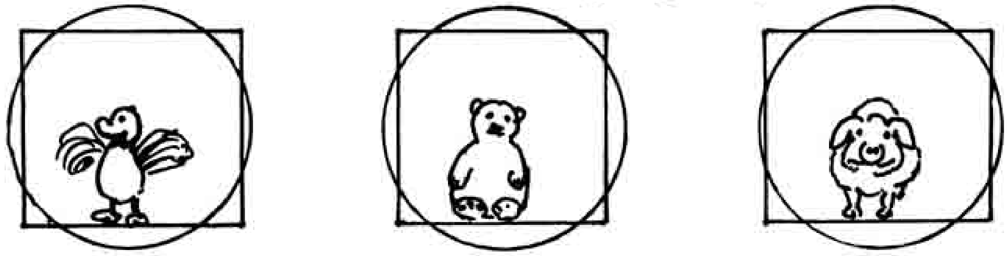
$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$

4) nach George Odom (1982 n. Chr.):



$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = \varphi$$

Der bereits erwähnte Luca Paciolo hat in einer Abhandlung über Proportionen auch die berühmte Studie von Leonardo da Vinci (war ja versprochen),(1451 bis 1519),



aufgenommen, weshalb gerne angenommen wird, auch Leonardo habe in seinen Werken bewusst den goldenen Schnitt verwendet. Zweifel sind angebracht. Sofern nicht ausdrücklich schriftliche Zeugnisse über die Absicht des Künstlers vorliegen, kann dies nachträglich nicht konstatiert werden. Bei einer Messung an einem Werk der Malerei oder der Architektur (z.B. auf der Akropolis) kann man den goldenen Schnitt wohl kaum vom ebenfalls sehr beliebten und im Zweifelsfall vermutlich wahrscheinlicheren Teilungsverhältnis 8:5 unterscheiden.
Neben anderen hat im 19. Jahrhundert ein Herr Zeising, beruflich Philosoph, verkündet, Luca und Leonardo hätten in Teamarbeit das alte Naturgesetz der Ästhetik (den Goldenen Schnitt) wieder entdeckt und in die Renaissance eingebracht. Na gut, wer´s mag.
Manche Leute finden den Goldenen Schnitt auch in der Musik und bei Sonnenblumen, Kakteen und Kohl. Wie gesagt, wer´s mag.
Im Internet phindet man auch phi-Phans, die dieser sicherlich interessanten Zahl was weiß ich für Bedeutungen zumessen. Z.B. durfte ich lesen, φ sei eine transzendente Zahl. Klingt für manchen vielleicht gut, ist aber Blödsinn.
φ ist algebraisch, π und e sind transzendent.
Das hat mit der Quadratur des Kreises zu tun, aber das wäre ein neues Thema.